Guía de Ejercicios Compilada: Ecuaciones en Diferencia

Material de Estudio Consolidado

17 de septiembre de 2025

Índice

1. Conceptos Fundamentales y Ecuaciones Lineales de Primer Orden **2**

2. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden **4**

3. Ecuaciones Lineales de Orden Superior **5**

4. Análisis Cualitativo y Estabilidad **5**

1. Conceptos Fundamentales y Ecuaciones Lineales de Primer Orden

1) Aplique el operador diferencia Δ a las siguientes funciones (considere $h = 1$):

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = 2^x$
e) $f(x) = e^x$

2) Halle la solución general de las siguientes ecuaciones en diferencias de primer orden y analice el comportamiento de su trayectoria temporal.

a) $y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 0$
b) $y_{t+1} + 3y_t = 0$
c) $6y_{t+1} + 2y_t = 0$
d) $2y_{t+1} - 6y_t = -4$
e) $3y_{t+1} - 3y_t + 7 = 0$
f) $3y_{t+1} = 2y_t + 3$
g) $y_{t+1} - y_t = -t$
h) $y_{t+1} - 2y_t = t$
i) $y_t + 5y_{t-1} = 2t + 2$ (Sugerencia: reescriba en términos de $t + 1$ y t)
j) $2y_{t+1} - 2y_t = 6t + 2$
k) $y_{t+1} = 5y_t + 8t^2 - 12t + 1$
l) $y_{t+1} - \frac{1}{3}y_t = 7 \cdot 5^t$
m) $y_{t+1} + y_t = 10t + 5(-1)^t$
n) $y_{t+1} + 3y_t = 4t(-2)^t$

3) Resuelva los siguientes problemas de valor inicial (PVI), determine el comportamiento de la solución y calcule sus primeros cinco valores $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$.

a) $y_{k+1} - 3y_k = -1, \quad y_0 = 1$
b) $y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k = -1, \quad y_0 = 5$
c) $y_{t+1} + 4y_t = -12, \quad y_0 = 6$
d) $8y_{t+1} + 4y_t - 3 = 0, \quad y_0 = \frac{1}{2}$
e) $3y_{t+1} - 2y_t - 3 = 0, \quad y_0 = 5$
f) $y_{k+1} - y_k = 3, \quad y_0 = 2$
g) $2y_{k+1} - 6y_k = -4, \quad y_3 = 19$

4) Aplicación: Interés Compuesto. Se invierte una suma de dinero C_t en el período t, la cual período a período se capitaliza a una tasa de interés i. Esta situación define la siguiente ecuación en diferencias:

$$C_{t+1} = C_t + i \cdot C_t = C_t(1 + i)$$

Se pide:

a) Hallar la solución general.

b) Analizar la estabilidad (estable o inestable) de la solución y el comportamiento (monótona u oscilante).

c) Si se invierte en el período $t = 0$ una suma de $C_0 = 100$ a una tasa del $5\,\%$, ¿cuánto capital se acumulará en el período $t = 5$?

d) Si se invierte inicialmente 100 a una tasa de interés del $2\,\%$, ¿a partir de qué período t el capital se ve duplicado?

2. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

5) Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias homogéneas de segundo orden:

a) $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$

b) $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 0$

c) $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$

d) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0$

e) $y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k = 0$

f) $y_{k+2} + y_k = 0$

6) Para cada una de las ecuaciones del ejercicio anterior, hallar la solución particular que cumpla con las siguientes condiciones iniciales:

a) Para 5a): $y_0 = 2, \quad y_1 = 0$

b) Para 5b): $y_0 = 1, \quad y_1 = 3$

c) Para 5c): $y_0 = -2, \quad y_1 = 9$

7) Halle la solución general de las siguientes ecuaciones en diferencias no homogéneas de segundo orden:

a) $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 10$

b) $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 10$

c) $y_{k+2} + 4y_{k+1} - 5y_k = 24$

d) $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 5 \cdot 3^t$

e) $10y_{t+2} + 13y_{t+1} - 3y_t = t + \frac{13}{20}$

f) $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = k^2 + 3$

g) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 100 + t$

h) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 5 \cdot 2^t$

i) $y_{t+2} - 9y_t = 36 \cdot (-3)^t$

j) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3 \cdot 2^t + 5$

k) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = (2t + 1)3^t$

l) $y_{t+2} + y_t = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

m) $y_{k+2} + 4y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 3k$

8) Aplicación: Sucesión de Fibonacci. Considere la sucesión $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$, donde cada número es la suma de los dos anteriores. Se pide:

a) Expresar el n-ésimo término de la sucesión como una ecuación en diferencias con dos condiciones iniciales.

b) Obtener la expresión general del n-ésimo término de la sucesión (Fórmula de Binet).

c) Calcular el vigésimo primer término de la sucesión.

3. Ecuaciones Lineales de Orden Superior

9) Halle la solución general de las siguientes ecuaciones en diferencias de orden superior:

a) $y_{k+3} - y_k = 0$

b) $y_{k+4} - y_k = 5 + \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

c) $y_{k+3} - 9y_{k+2} + 26y_{k+1} - 24y_k = 3$

d) $y_{t+3} - \frac{1}{2}y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$

e) $y_{t+3} - y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 15 \cdot 3^t$

f) $y_{k+3} - y_{k+2} + 2y_k = k + 2^k$

g) $y_{k+3} - 7y_{k+2} + 16y_{k+1} - 12y_k = 2^k$

h) $y_{k+3} - y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = k \cdot 2^k$

i) $6y_{t+4} + 5y_{t+3} - 38y_{t+2} + 5y_{t+1} + 6y_t = 2^t + t \cdot 3^t$

j) $y_{k+4} - 2y_{k+3} + 2y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0$

10) Para las siguientes ecuaciones, halle la solución de la ecuación homogénea asociada y plantee la forma de la solución particular (sin calcular los coeficientes).

a) $y_{t+4} + 4y_{t+3} + 3y_{t+2} - 4y_{t+1} - 4y_t = g(t)$, donde:

   i) $g(t) = 5t^3 - \frac{7}{4}(-3)^t$

   i) $g(t) = (-2)^t(2t^2 - 7)$

b) $y_{t+3} - y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = g(t)$ (Note: el problema original tenía un error de tipeo)

   i) $g(t) = 4 \cdot 3^t + 5$

   i) $g(t) = (-1)^t(-t + 8)$

4. Análisis Cualitativo y Estabilidad

11) Indicar cuáles de las siguientes ecuaciones en diferencias lineales son estables utilizando el teorema de Schur.

a) $y_{t+1} - \frac{2}{3}y_t = 0$

b) $y_{t+2} + \frac{1}{6}y_{t+1} - \frac{1}{3}y_t = 0$

c) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$

12) En las siguientes ecuaciones en diferencias no lineales, determine los puntos de equilibrio, construya un diagrama de fases y estudie la estabilidad local asintótica.

a) $x_{t+1} = x_t^2$

b) $x_{t+1} = -x_t$

c) $x_{t+1} = 2x_t - 2x_t^2$

d) $x_{t+1} = x_t(x_t - 2)$

e) $x_{t+1} = x_t^2 - x_t + 1$